Задача A. Операции с многочленами

Ввод:	`стандартный ввод`
Вывод:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Даны два многочлена P и Q:
$P(t) = p_0 + p_1 \cdot t + \cdots + p_n \cdot t^n$
$Q(t) = q_0 + q_1 \cdot t + \cdots + q_m \cdot t^m$

Найдите $P(t) + Q(t)$, $P(t) \cdot Q(t)$ и первые 1000 коэффициентов ряда $\frac{P(t)}{Q(t)}$. Все вычисления необходимо производить по модулю $998\,244\,353$.

Формат входных данных

В первой строке содержатся числа n и m $(1 \leqslant n, m \leqslant 1000)$ — степени многочленов P и Q.

Вторая строка содержит $n + 1$ число $p_0, p_1, \ldots, p_n$ — коэффициенты многочлена P $(0 \leqslant p_i < 998\,244\,353)$, гарантируется, что $p_n > 0$.

Третья строка содержит $m + 1$ число $q_0, q_1, \ldots, q_m$ — коэффициенты многочлена Q $(0 \leqslant q_i < 998\,244\,353)$, гарантируется, что $q_0 = 1$ и $q_m > 0$.

Формат выходных данных

В первой строке выведите степень многочлена $P + Q$, во второй строке выведите его коэффициенты. Если многочлен не равен тождественно нулю, то старший коэффициент должен быть ненулевым, степень многочлена, тождественно равного нулю, считается равной 0.

В третьей строке выведите степень многочлена $P \cdot Q$, во четвертой строке выведите его коэффициенты, старший коэффициент должен быть ненулевым.

В последней строке выведите 1000 первых коэффициентов $\frac{P(t)}{Q(t)}$.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод

`3 2`
`0 1 2 3`
`1 2 3`
	`3`
	`1 3 5 3`
	`5`
	`0 1 4 10 12 9`
	`0 1 0 ... 0`

`1 3`
`1 2`
`1 4 5 2`
	`3`
	`2 6 5 2`
	`4`
	`1 6 13 12 4`
	`1 998244351 3 ... 999 998243353`

Задача B. Операции с многочленами — 2

Ввод:	`стандартный ввод`
Вывод:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Дан многочлен P степени n со нулевым свободным членом:

$$P(t) = p_1 \cdot t + \ldots + p_n \cdot t^n$$

Найдите первые m коэффициентов $\sqrt{1 + P(t)}$, $e^{P(t)}$ и $\ln(1 + P(t))$. Все вычисления необходимо производить по модулю $998\,244\,353$.

Формат входных данных

В первой строке содержатся числа n и m ($1 \leqslant n, m \leqslant 100$) — степень многочлена P и необходимое количество коэффициентов.

Вторая строка содержит $n + 1$ число $p_0, p_1, \ldots, p_n$ — коэффициенты многочлена P ($0 \leqslant p_i < 998\,244\,353$), гарантируется, что $p_n > 0$ и $p_0 = 0$.

Формат выходных данных

Выведите три строки. В первой строке выведите первые m коэффициентов ряда $\sqrt{1 + P(t)}$, соответствующие степеням t^0, t^1, $\ldots$, t^{m-1}. В следующих двух строчках в аналогичном формате выведите коэффициенты $e^{P(t)}$ и $\ln(1 + P(t))$ по модулю $998\,244\,353$.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
1 4 0 1	1 499122177 124780544 935854081 1 1 499122177 166374059 0 1 499122176 332748118

Замечание

Дробь $\frac{a}{b}$ mod m следует вычислять, как $a \cdot b^{-1}$ mod m, где b^{-1} обозначает обратный по модулю m элемент к b: bb^{-1} mod $m = 1$. Про нахождение обратного по модулю элемента вы можете прочитать, например, на e-maxx: `http://e-maxx.ru/algo/reverse_element`.

Например, $\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + \ldots$. $\frac{1}{2}$ mod $M = 1 \cdot 2^{-1}$ mod $M = 499122177$ и $\frac{1}{8} = 1 \cdot 6^{-1}$ mod $M = 124780544$.

Задача C. Рациональная производящая функция

Ввод:	`стандартный ввод`
Вывод:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Задана линейная рекуррентная последовательность порядка k: даны первые k значений $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, а для $n \geqslant k$ выполнено $a_n = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$.

Известно, что если последовательность задана линейной рекуррентностью, то она имеет производящую функцию $A(t) = P(t)/Q(t)$, где P и Q — многочлены.

По заданной последовательности a_n найдите P и Q.

Можно показать, что если элементы последовательности целые, то существуют такие P и Q с целыми коэффициентами, не превосходящими по модулю 10^{12}, причем степень многочлена Q не превышает k, а $q_0 = 1$. Именно такие многочлены требуется найти.

Формат входных данных

Первая строка содержит число k ($1 \leqslant k \leqslant 1000$). Вторая строка содержит k целых чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ($-1000 \leqslant a_i \leqslant 1000$ для всех i от 0 до $k-1$). Гарантируется, что среди начальных значений есть хотя бы одно ненулевое.

Третья строка содержит коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($-1000 \leqslant c_i \leqslant 1000$, $c_k \neq 0$).

Формат выходных данных

Выведите многочлены $P(t)$ и $Q(t)$, каждый в следующем формате: в первой строке степень многочлена d, в следующей — $d+1$ коэффициент $f_0, f_1, \ldots, f_d$, $f_d \neq 0$. Степень многочлена Q не должна превышать k, q_0 должно быть равно 1.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
2 1 1 1 1	0 1 2 1 -1 -1

Задача D. Явная формула

Ввод:	`стандартный ввод`
Вывод:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Вам дана производящая функция последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, вида $A(t) = \frac{P_k(t)}{(1-rt)^{k+1}}$, где $P_k(t)$ — многочлен степени не больше k.

Известно, что для достаточно больших n можно точно выразить n-й член последовательности квазимногочленом $a_n = f_k(n)r^n$, где f_k — многочлен степени не выше k, каждый коэффициент которого является рациональным числом. Найдите $f_k(n)$.

Формат входных данных

В первой строке содержатся два целых числа r и k ($1 \leqslant r, k \leqslant 10$). Во второй строке содержится $k+1$ число — коэффициенты $P_k(t)$, начиная с младшего ($-10 \leqslant p_i \leqslant 10$). Гарантируется, что хотя бы один коэффициент не равен нулю.

Формат выходных данных

Выведите $k+1$ дробь — коэффициенты многочлена $f_k(n)$, начиная с младшего. Дробь p/q следует выводить как «`p/q`», где $q > 0$, p и q взаимно просты.

Можно доказать, что все числители и знаменатели дробей представимы в 64-битном целочисленном типе данных. Следите за переполнением!

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
`2 1` `1 0`	`1/1 1/1`
`3 2` `-1 4 -1`	`-1/1 -7/9 1/9`

Замечание

В первом примере, $A(t) = \frac{1}{(1-2t)^2}$ является производящей функцией для последовательности $a_n = (n+1)2^n$. Во втором примере, $A(t) = \frac{-1+4t-t^2}{(1-3t)^3}$ является производящей функцией последовательности $a_n = 3^{n-2}(n^2 - 7n - 9)$.

Задача E. От квазимногочлена к дроби

Ввод:	стандартный ввод
Вывод:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Квазимногочленом называется функция $f(n) = p(n) \cdot r^n$, где $p(n)$ — многочлен.

Известно, что если последовательность a_n задана формулой $a_n = f(n)$, где $f(n)$ — квазимногочлен, то она имеет производящую функцию $A(t) = P(t)/Q(t)$, где P и Q — многочлены.

По заданному квазимногочлену f найдите P и Q.

Можно показать, что если коэффициенты многочлены p целые и число r целое, то P и Q имеют целые коэффициенты, причем существует единственная пара многочленов P и Q, что у них нет общего делителя степени больше 1, а также $q_0 = 1$. Именно такие многочлены требуется найти.

Формат входных данных

Первая строка содержит целое число r ($1 \leqslant r \leqslant 10$).

Вторая строка содержит число d — степень многочлена p ($0 \leqslant d \leqslant 10$).

Третья строка содержит $d + 1$ целое число: $p_0, p_1, \ldots, p_d$ ($-10 \leqslant p_i \leqslant 10$, $p_d \neq 0$).

Формат выходных данных

Выведите сначала многочлен P, а затем многочлен Q.

Сначала выведите степень многочлена, а затем коэффициенты многочлена, начиная от младшего к старшему.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
2 0 1	0 1 1 1 -2
3 3 2 3 9 1	3 2 21 36 -189 4 1 -12 54 -108 81

Задача F. Подсчет деревьев

Ввод:	`стандартный ввод`
Вывод:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Бинарным деревом в этой задаче назовем дерево, каждая вершина которого имеет выделенное левое и выделенное правое поддерево, каждое из которых может быть пустым (в этом случае вершина является листом).

Заданы числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Посчитайте количество различных бинарных деревьев, в которых каждая вершина может иметь вес, равный любому из значений c_i. Вершины равного веса считаются одинаковыми.

Формат входных данных

В первой строке содержатся два целых числа k и m ($1 \leqslant k, m \leqslant 2\,000$) — количество весов вершин и максимальный вес дерева. В следующей строке содержатся числа c_i ($1 \leqslant c_i \leqslant m$). Все c_i различны.

Формат выходных данных

Выведите m чисел — количество деревьев веса $1, 2, \ldots, m$ по модулю $10^9 + 7$.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
2 5 1 3	1 2 6 18 57
1 10 2	0 1 0 2 0 5 0 14 0 42

Задача G. Конструируемые комбинаторные классы

Ввод:	`стандартный ввод`
Вывод:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

В этой задаче мы используем следующие способы конструирования комбинаторных объектов.

Базовое множество B состоит из одного объекта u с весом 1. Каждый сконструированный объект x имеет некоторый вес $w(x)$. Если объект сконструирован из одного или нескольких других объектов, его вес равен сумме весов этих объектов.

Пусть X задаёт некоторое множество комбинаторных объектов. Рассмотрим следующие способы создать новые множества объектов.

Множество $L(X)$ состоит из всех возможных списков конечной длины, каждый элемент которых имеет положительный вес и принадлежит множеству X. Например, $L(B)$ состоит из списков $[]$, $[u]$, $[u,u]$, $[u,u,u]$, и так далее. Аналогично, $L(L(B))$ состоит из $[]$, $[[u]]$, $[[u],[u]]$, $[[u,u],[u]]$, $[[u],[u,u]]$, и так далее. Обратите внимание, последние два списка различны, поскольку для списка важен порядок элементов в нем. Также обратите внимание, что $[[]]$ не является корректным списком в $L(L(B))$, поскольку только объекты положительного веса разрешаются в качестве элементов списков, а $[]$ имеет вес 0.

Множество $S(X)$ содержит все возможные мультимножества конечного размера, каждый элемент которых имеет положительный вес и принадлежит X. Например, $S(B)$ состоит из мультимножеств $\{\}$, $\{u\}$, $\{u,u\}$, $\{u,u,u\}$, и так далее. Еще один пример: $S(L(B))$ содержит, например, мультимножества $\{[u]\}$, $\{[u],[u]\}$. Обратите внимание, что мультимножество может содержать несколько равных объектов. Заметьте, что в отличие от списков для мультимножеств не важен порядок элементов, поэтому мультимножество $\{[u],[u,u]\}$ совпадает с мультимножеством $\{[u,u],[u]\}$.

Вес списка или мультимножества равен сумме весов его элементов, например, вес $([u],[u,u],[u,u,u])$ равен 6.

Наконец, последний рассматриваемый способ создания нового типа комбинаторных объектов — пара. Если X и Y — множества комбинаторных объектов, то $P(X,Y)$ представляет собой множество упорядоченных пар объектов, где первый компонент взят из X, а второй — из Y. Например, $P(S(B),L(B))$ содержит в качестве элементов $\langle\{u,u\},[u,u,u]\rangle$ и $\langle\{\},[u]\rangle$. Обратите внимание, что в отличие от списков, мультимножеств и циклов, пары могут содержать компоненты нулевого веса.

По заданному описанию класса комбинаторных объектов посчитайте количество элементов веса 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Формат входных данных

В единственной строке входного файла содержится корректное описание комбинаторного объекта. Длина описания не превосходит 200.

Формат выходных данных

Выведите семь целых чисел — количество объектов в описанном комбинаторном классе с весом от 0 до 6.

Примеры

стандартный ввод
`P(S(B),L(B))`
стандартный вывод
`1 2 3 4 5 6 7`

стандартный ввод
`S(L(B))`
стандартный вывод
`1 1 2 3 5 7 11`

стандартный ввод
L(P(L(L(L(P(P(P(B,L(B)),L(B)),P(B,L(B)))))),P(B,L(B))))
стандартный вывод
1 1 2 5 14 42 132

Задача H. Деревья, избегающие левых расчёсок

Ввод:	`стандартный ввод`
Вывод:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	512 мегабайт

Структуры, избегающие определенных подструктур, активно изучаются в комбинаторике. В этой задаче мы изучим деревья, избегающие определенных поддеревьев.

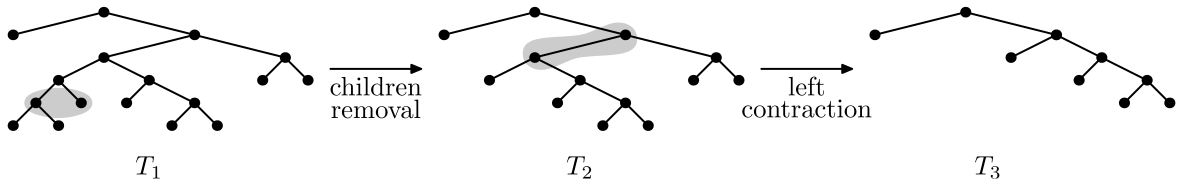
Рассмотрим подвешенное двоичное дерево, в котором каждая вершина имеет ровно двух детей: левого и правого (внутренняя вершина), или не имеет ни одного ребенка (лист). В особом случае дерева из одной вершины его корень также считается листом.

Будем говорить, что дерево T *стягивается* к дереву R, если R можно получить из T последовательностью следующих операций:

- *Удаление детей*: удалить оба поддерева у внутренней вершины, превратив ее в лист.
- *Левое стягивание*: пусть y — левый сын x. Заменим детей x на детей y.
- *Правое стягивание*: пусть y — правый сын x. Заменим детей x на детей y.

Дерево T *избегает* дерева R, если T не стягивается к дереву R.

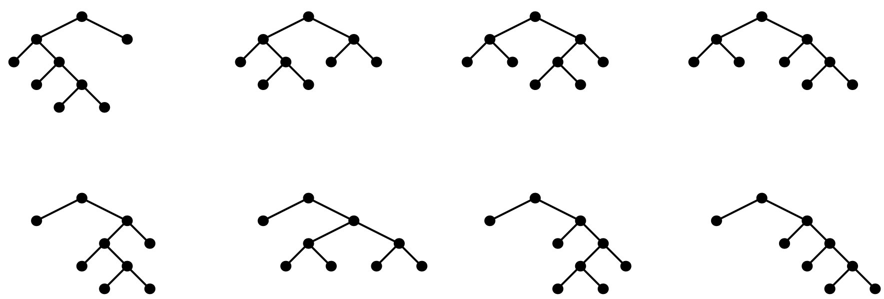
Рисунок ниже показывает описанные операции, также он демонстрирует, что дерево T_1 стягивается к дереву T_3.



Левой расческой порядка k называется дерево с k листьями, где правый сын любой вершины представляет собой лист. На рисунке ниже показаны левые расчески порядка k для k от 2 до 5.

По заданному k и n вычислите для всех i от 1 до n количество деревьев с i листьями, избегающих левых расческов порядка k. Выведите эти числа по модулю $998\,244\,353$.

Все деревья с 5 листьями, избегающие левых расческов порядка 4, показаны на рисунке.



Формат входных данных

На вход подаётся два числа: k и n ($2 \leqslant k \leqslant 5000$, $1 \leqslant n \leqslant 5000$).

Формат выходных данных

Выведите n целых чисел: для каждого i от 1 до n выведите число деревьев с i листьями, избегающих левых расческов порядка k, выводите числа по модулю $998\,244\,353$.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
4 5	1 1 2 4 8
7 6	1 1 2 5 14 42

Задача I. Генератор случайных чисел

Ввод:	`стандартный ввод`
Вывод:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Одним из возможных способов написать генератор случайных чисел являются линейные рекурренты.

Рассмотрим следующую линейную рекурренту:

$A_i = (A_{i-1}C_1 + A_{i-2}C_2 + \ldots + A_{i-k}C_k) \bmod 104857601$, где $i \geqslant k + 1$

Вам даны начальные значения $A_1, A_2, \ldots, A_k$, а также коэффициенты рекурренты $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Вычислите A_n, для заданного n.

Формат входных данных

В первой строке дано число k ($1 \leqslant k \leqslant 1000$), и число n ($1 \leqslant n \leqslant 10^{18}$).

Вторая строка содержит ровно k чисел: $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ($0 \leqslant A_i < 104857601$).

В третьей строке записаны ровно k чисел: $C_1, C_2, \ldots, C_k$ ($0 \leqslant C_i < 104857601$).

Формат выходных данных

Выведите одно число — ответ на задачу.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
3 5 1 2 3 4 5 6	139