

Потенциал Бибоба

Автор задачи и разработчик: Ильнур Валеев

Рассмотрим строку s и разобьём её на максимальные блоки одинаковых подряд идущих символов. Пусть длины блоков равны

$$l_1, l_2, \dots, l_m.$$

Тогда потенциал строки равен

$$l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_m^2.$$

Разрешено выполнить не более одной операции: взять один символ, удалить его из строки и вставить в любое место. Важно заметить, что после такой операции изменяются только блок, из которого символ удалили, и блок, в который символ вставили (а также, возможно, их соседи).

Наблюдения

1. Большие блоки — «дорогие».

Если уменьшить блок длины L на 1, вклад в потенциал изменится на

$$(L-1)^2 - L^2 = -2L + 1.$$

Чем больше L , тем выгоднее забирать символ именно из этого блока.

2. Если вставлять символ внутрь «чужого» блока (другой буквы), блок выгодно делить как можно равномернее.

Пусть блок длины T разбивается на два блока длины x и y , где $x + y = T$. Тогда новый вклад:

$$x^2 + y^2 + 1.$$

При фиксированной сумме $x + y = T$ сумма квадратов минимальна, когда части максимально близки:

$$x = \left\lfloor \frac{T}{2} \right\rfloor, \quad y = \left\lceil \frac{T}{2} \right\rceil.$$

3. Если вставлять символ в блок того же символа, лучше увеличивать самый короткий блок.

Если увеличить блок длины T до $T + 1$, потенциал изменится на

$$(T+1)^2 - T^2 = 2T + 1,$$

что минимально при минимальном T .

4. Если удалить блок длины 1, он может склеить соседние блоки.

Например:

$$\mathbf{aa} \mathbf{b} \mathbf{aaa} \rightarrow \mathbf{aaaaa}.$$

Это нужно учитывать отдельно.

Группа 1

В этой группе тестов суммарная длина строк не превосходит 200.

Можно перебрать все варианты одной операции:

1. выбрать позицию i ;
2. удалить символ;
3. вставить его во все возможные позиции;
4. пересчитать потенциал.

Сложность такого решения — $\mathcal{O}(n^3)$ из перебора удаляемой позиции, перебора места вставки, и, собственно, модификации строки и пересчета потенциала на каждый такой способ. Этого достаточно для этой подзадачи, чтобы уложиться в ограничения по времени.

Группа 2

Суммарная длина строк не превосходит 2000. Соптимизируем предыдущее решение до $\mathcal{O}(n^2)$ по времени.

Заметим, что после одной операции меняются только несколько блоков. Поэтому можно:

1. сначала сжать строку в блоки;
2. перебирать блок-источник и блок вставки;
3. пересчитывать изменение потенциала только локально.

«Пересчитывать локально» в данном случае означает вычесть потенциалы исчезнувших или измененных блоков и добавить потенциалы новых. Это можно делать за $\mathcal{O}(1)$, что уменьшает общее время работы до $\mathcal{O}(n^2)$.

Группа 3

В этой группе тестов в строке не более двух различных букв. В этом случае оптимальная операция может быть только одного из следующих типов:

1. Перенести символ из самого длинного блока в блок другой буквы и разбить его на две максимально равные части.
2. Перенести символ из самого длинного блока в самый короткий блок той же буквы.
3. Удалить блок длины 1, возможно склеив соседние блоки, и затем вставить символ внутрь блока другой буквы.

Все необходимые значения (максимальный блок, минимальный блок, лучший одиночный блок) можно найти за один проход по блокам, после чего ответ считается по формулам за $\mathcal{O}(1)$ с итоговой сложностью $\mathcal{O}(n)$.

Группа 4

Здесь каждый символ образует не более одного блока. Тогда число блоков не превышает размера алфавита (26), поэтому можно просто перебрать:

1. из какого блока забираем символ;
2. в какой блок вставляем;
3. разбиваем ли блок.

Аналогично, каждое изменение приводит к достаточно локальным пересчетам, и время работы равно $\mathcal{O}(n + m^2)$ для $m \leq 26$ — числа блоков.

Полное решение

Пусть текущий потенциал равен

$$S = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_m^2.$$

Рассмотрим все возможные полезные операции.

1. Перенос в блок другой буквы

Берём символ из блока длины $L > 1$ и вставляем в блок длины T другой буквы:

$$S - L^2 + (L - 1)^2 - T^2 + \left\lfloor \frac{T}{2} \right\rfloor^2 + \left\lceil \frac{T}{2} \right\rceil^2 + 1.$$

2. Перенос в блок той же буквы

$$S - L^2 + (L - 1)^2 - T^2 + (T + 1)^2.$$

3. Перенос из одиночного блока

Если блок длины 1 находится между блоками длины a и b одной буквы, то после удаления они склеиваются:

$$(a + b)^2 - a^2 - b^2.$$

После этого вставляем символ внутрь блока длины T :

$$-T^2 + \left\lfloor \frac{T}{2} \right\rfloor^2 + \left\lceil \frac{T}{2} \right\rceil^2.$$

4. Перестроение вокруг одиночного блока

Для фрагмента

$$\mathbf{x}^a \mathbf{y} \mathbf{x}^b$$

можно получить

$$\mathbf{x}^{\lfloor (a+b)/2 \rfloor} \mathbf{y} \mathbf{x}^{\lceil (a+b)/2 \rceil}.$$

Старый вклад:

$$a^2 + 1 + b^2,$$

новый вклад:

$$\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor^2 + 1 + \left\lceil \frac{a+b}{2} \right\rceil^2.$$

Все необходимые значения можно посчитать за один проход по блокам, а затем перебрать все пары букв. Пользуясь наблюдениями в самом начале достаточно не перебирать все итоговые блоки, а только рассмотреть наиболее оптимальные блоки для вставки: максимальный или минимальный по каждой букве. Итоговая сложность: $\mathcal{O}(n)$ на одну строку.