

# Экзамен на героя

Автор задачи и разработчик: Даниил Орешников

Для начала заметим, что наличие и  $a$  и  $c$  в условии — избыточная информация. Задача остается эквивалентной исходной, если изначально  $a = 0$ , а требуется получить число  $c - a$ , так как важно только то, сколько в итоге будет добавлено.

## Группа 1

В этой группе гарантируется, что изначально  $b \leq 4$ . Можно просто выписать на бумажке все возможные сценарии, и заметить, что достижимые значения  $c$  для всех возможных  $b$  — это:

- только 1 при  $b = 1$ ;
- 2 при  $(b = 2) \rightarrow (\lfloor \frac{2}{4} \rfloor = 0)$ ;
- 3 при  $(b = 2) \rightarrow (\lfloor \frac{2}{2} \rfloor = 1) \rightarrow (\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0)$ ;
- 3 при  $(b = 3) \rightarrow (\lfloor \frac{3}{4} \rfloor = 0)$ ;
- 4 при  $(b = 3) \rightarrow (\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1) \rightarrow (\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0)$ ;
- 5 при  $(b = 4) \rightarrow (\lfloor \frac{4}{4} \rfloor = 1) \rightarrow (\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0)$ ;
- 6 при  $(b = 4) \rightarrow (\lfloor \frac{4}{2} \rfloor = 2) \rightarrow (\lfloor \frac{2}{4} \rfloor = 0)$ ;
- 7 при  $(b = 4) \rightarrow (\lfloor \frac{4}{2} \rfloor = 2) \rightarrow (\lfloor \frac{2}{2} \rfloor = 1) \rightarrow (\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0)$ .

Поэтому дальше было достаточно проверить, что изначальное  $c - a$  равно одному из достижимых значений для данного во вводе  $b$ .

## Группы 2 и 3

Во второй группе тестов было дано, что  $b \leq 10^5$ . Можно написать простой перебор всех возможных сценариев, который выглядит как

```
check(a, b, c):  
    if b == 0: return a == c  
    check(a + b, b / 2, c)  
    check(a + b, b / 4, c)
```

Если оценить время работы этого алгоритма, то получается порядка  $\mathcal{O}(b)$ , так что во второй группе тестов было достаточно написать ровно это.

Если перебор был написан аккуратно и эффективно (например, с проверкой `if a > c: return false`), то его время работы оценивалось как  $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + 1$ . Решение этого соотношения дает сублиненное время работы ( $T(b) = o(b)$ ). И такой перебор уже проходил и третью группу тестов: для  $b = 10^8$  решение этого рекуррентного соотношения дает достаточно небольшие значения, чтобы уложиться в ограничения.

## Наблюдение

Четвертая и пятая группы тестов позволяли заметить определенное ключевое наблюдение, необходимое для полного решения. Рассмотрим два крайних сценария: всегда делить на 4 и всегда делить на 2. В первом случае мы прибавим

$$\Delta_4 = b + \left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{16} \right\rfloor + \dots$$

Во втором:

$$\Delta_2 = b + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor + \dots$$

Заметим, что оба значения ограничены сверху такими же суммами, но без округления вниз, в частности  $\Delta_4 \leq b + \frac{b}{4} + \frac{b}{16} + \dots = \frac{4}{3}b$  по сумме геометрической прогрессии, и аналогично  $\Delta_2 \leq b + \frac{b}{2} + \frac{b}{4} + \dots = 2b$ . При этом в точности  $2b$  мы на самом деле не можем получить, так как для округления вниз обрезаем как минимум бесконечно много нецелых членов этих двух прогрессий.

Тогда теоретический максимум для случая, когда мы всегда делим на 4, равен  $\frac{4}{3}b - 1$ . На самом деле теоретический *минимум* не сильно меньше: для любого  $x$  верно, что  $\lfloor x \rfloor > x - 1$ . Всего слагаемых в сумме для  $\Delta_4$  ровно  $\lfloor \log_4 b \rfloor$ , значит  $\Delta_4 > \frac{4}{3}b - \log_4 b$ .

Итого мы получили

$$\Delta_{\min} = \frac{4}{3}b - \log_4 b, \quad \Delta_{\max} = 2b - 1.$$

## Группа 4

В четвертой группе дано, что  $c = a + 2b - 1$ . Иными словами, необходимо прибавить в точности  $2b - 1$ , чтобы получить то, что требуется. Заметим, что  $2b - 1$  можно получить одним единственным образом (кроме случая  $b = 1$ ): всегда делить только на 2, так как это теоретический достижимый максимум  $\Delta_{\max}$ . Таким образом, если мы хоть раз поделим на 4 до того, как получим  $b \leq 1$ , мы уже не сможем этот максимум достичь.

Этого уже достаточно для решения: достаточно проэмулировать процесс. Но можно было решить эту группу вообще за  $\mathcal{O}(1)$ , если заметить, что теоретический максимум в  $2b - 1$  достигается только когда  $b$  — степень двойки. Иначе хотя бы одно округление вниз «заберет» еще больше из итоговой суммы.

## Группа 5

В пятой группе идея похожая: оценка на  $c - a$  близка к теоретическому минимуму  $\Delta_{\min}$ . Таким образом, в пятой группе *почти* всегда надо делить на 4, и только если этого не хватит, можно запустить небольшой перебор по последним нескольким шагам.

## Полное решение

Для полного решения осталось только заметить, что достижимые интервалы чисел при делении текущего  $b$  на 4 и делении на 2 вообще не пересекаются. Действительно, мы уже выяснили, что достижимый максимум — это  $2b - 1$ , а потенциально достижимый минимум — порядка  $\frac{4}{3}b - \log_4 b$ .

Рассмотрим произвольный момент процесса, и выполним прибавление  $a \leftarrow a + b$ . Проанализируем, какие значения вообще останутся достижимыми при делении на 2 и на 4.

- Если мы сделаем  $b' = \lfloor \frac{b}{4} \rfloor$ , *максимальное* значение того, что еще будет прибавлено, равно  $2b' - 1 \leq \frac{b}{2}$ .
- Если мы сделаем  $b' = \lfloor \frac{b}{2} \rfloor$ , *минимальное* значение того, что еще будет прибавлено, равно  $\frac{4}{3}b' - \log_4 b' \approx \frac{2}{3}b - \log_4 b + \mathcal{O}(1)$ . Это всегда больше, чем  $\frac{b}{2}$  (для достаточно больших  $b$  логарифм не влияет, для маленьких проверяется эмпирически).

Более просто сформулировать это можно так: если мы должны были делить на 2, но поделили на 4, нам уже гарантированно не хватит на нужную сумму; если же мы должны были делить на 4, а поделили на 2, то мы гарантированно взяли больше, чем надо было. Поэтому следующее действие **определяется однозначно**.

Иными словами, корректная логика решения следующая:

1. если  $c - a - b \geq b$ , то решения гарантированно нет;
2. если  $c - a - b > \frac{b}{2}$ , то надо делить на 2;
3. если  $c - a - b \leq \frac{b}{2}$ , то надо делить на 4.

Единственные исключения составляют достаточно небольшие  $b$ , для которых не выполняется  $\frac{b}{2} < \frac{2}{3}b - \log_4 b$ , но как показывает небольшой стресс-тест, таких значений на самом деле вообще не существует. Также этот разбор сделан с уклоном в формальное доказательство, но если не хотелось проверять это неравенство или вообще его выводить, то для решения достаточно было либо оставить небольшой полный перебор действий для небольших  $b$ , либо сделать еще более грубые оценки, основанные на более простых наблюдениях.

Итоговое полное решение работает за  $\mathcal{O}(\log b)$ : каждый следующий шаг определяется однозначно. И, на самом деле, если уже был написан полный перебор (третья группа тестов), его можно было превратить в полное решение добавлением двух отсечений (текущего  $b$  либо гарантированно слишком много, либо слишком мало):

```
check(a, b, c):
    if a > c: return false
    if b == 0: return a == c

    if c - a >= 2 * b: return false // недостаточно
    if c - a <= 3/4 * b - log4(b): return false // слишком много

    check(a + b, b / 2, c)
    check(a + b, b / 4, c)
```

P.S. Забавный факт, что даже условие  $c - a \leq \frac{4}{3}b - \log_4 b$  на самом деле проверять не обязательно, так как следующих слоях рекурсии большинство попыток делить на два будут отсекаются по  $a > c$ .