

Погоня за Риком Праймом

Автор задачи и разработчик: Даниил Орешников

Для начала перейдем в другую систему координат: работать с суммой по максимумам из двух величин неудобно. Множество точек, для которых $\max(|x - x_i|, |y - y_i|) = d$ — это квадрат со стороной $2d$ с центром в (x_i, y_i) . Если повернуть плоскость на 45° и сжать координаты в $\sqrt{2}$ раз, получится «ромб» с тем же центром, но задаваемый равенством $|x - x_i| + |y - y_i| = d$. Таким образом, мы свели задачу к тому, чтобы найти такую (x, y) , для которой в новых координатах

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot (|x - x_i| + |y - y_i|)$$

минимальна (разумеется, сжимать координаты при этом не обязательно, можно оставить все вычисления в целых числах).

А эту сумму уже можно разбить на две независимые суммы по x и по y , после чего выбирать x и y независимо. Разберем, как выбрать оптимальный x . Перейдем в новые координаты, сделав замену $x' \leftarrow x + y$, $y' \leftarrow x - y$. После чего, чтобы минимизировать $\sum p_i |x' - x'_i|$, заметим, что нам надо найти «взвешенную медиану» множества x_i , то есть точку, слева и справа от которой сумма p_i не превосходит половины всей суммы (иначе можно сдвинуть x' в сторону большей суммы p_i и уменьшить искомую сумму). А это можно сделать, просто отсортировав все точки по x'_i и пройдясь линейным проходом, считая сумму p_i .

Таким образом, найдем оптимальный x' , после чего тем же образом найдем оптимальный y' . Чтобы вернуться в исходные координаты, достаточно взять $x = \frac{x' + y'}{2}$ и $y = \frac{x' - y'}{2}$, но для вывода даже не надо делить их на 2. Время работы решения — $\mathcal{O}(n \log n)$.