

Странная последовательность

Заметим, что если $n \equiv 2 \pmod{3}$, то мы можем узнать $(n - 1)$ -е число последовательности и умножить его на 2. Аналогично, если $n \equiv 0 \pmod{3}$, то мы можем узнать $(n - 2)$ -е число последовательности и умножить его на 3. Поэтому, давайте сделаем $n = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ и будем далее рассматривать последовательность 1, 4, 5, 6, 7, 9, ...

Утверждается, что все числа в последовательности имеют вид $2^x \cdot 3^y \cdot p$, где p — натуральное число, не делящееся на 2 и на 3, а $(x + y)$ — чётно. Это легко доказать по индукции. Теперь заметим, что наша последовательность монотонна (в нашем случае строго возрастает), поэтому мы можем применить бинарный поиск. Для числа mid мы должны узнать, сколько чисел в последовательности стоят до него. Переберём значения x и y и убедимся в том, что $(x + y)$ чётно. Теперь ответим на вопрос — сколько чисел вида $2^x \cdot 3^y \cdot a$ (a — это любое натуральное число) меньше или равны x ? Оказывается, их $al_{xy} = \lfloor \frac{mid}{2^x \cdot 3^y} \rfloor$. Теперь нам нужно из этого количества вычесть все числа, у которых a делится на 2 или на 3. Делается это так: $al_{xy} = al_{xy} - (\lfloor \frac{al_{xy}}{2} \rfloor + \lfloor \frac{al_{xy}}{3} \rfloor - \lfloor \frac{al_{xy}}{6} \rfloor)$. Просуммировав значения al_{xy} для всех чисел (x, y) , мы получим искомую величину vid (сколько чисел в последовательности стоят до числа mid). Если $vid < n$, то сдвинем левую границу бинарного поиска, иначе правую.

Когда бинарный поиск отработает, его правая граница и будет ответом на задачу. Не забываем, что иногда ответ надо будет домножить на 2 или на 3.