

Ловля пауков

Автор задачи и разработчик: Егор Юлин

Поймем, что означает условие про возможность распределить корм поровну вне зависимости от количества пауков. Если для любого t от 1 до k есть возможность распределить $m - 1$ порций корма на t пауков поровну, то $m - 1$ делится на t для любого t от 1 до k .

Следовательно, если мы выбрали какое-то количество корма m , то для каждого t от 1 до k для выбранного m , $m - 1$ должно делиться на t (так как один корм мы отдали на анализ, а оставшееся количество должны поровну распределить между пауками). И теперь наша задача сводится к поиску такого m , что

1. $m \leq n$;
2. $m - 1$ делится на все числа от 1 до k .

Давайте вместо этого искать подходящий $m' = m - 1$. Поскольку он делится на все числа от 1 до k , то он делится и на $\text{lcm}(1, 2, \dots, k)$, где lcm означает наименьшее общее частное. Известный факт: наименьшее общее частное выражается через наибольший общий делитель, который можно посчитать алгоритмом Евклида, следующим образом: $\text{lcm}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{gcd}(a, b)}$. А тогда вычислить $\text{lcm}(1, 2, \dots, k)$ можно, например, за время $\mathcal{O}(k \log k)$, так:

```
result = 1
for i = 2..k {
    result = result * i / gcd(result, i)
}
```

Теперь имеет смысл рассмотреть два случая (на самом деле не обязательно рассматривать эти случаи явно, можно было просто считать lcm , пока оно не превысит $n - 1$, но мы в явном виде укажем границу на k , при которой это происходит):

1. $k \geq 43$, а тогда $\text{lcm}(1, 2, \dots, k) > 10^{18}$, и единственное подходящее нам m' — это 0, так как $m' \leq n - 1 < 10^{18}$;
2. $k < 43$, тогда можно «по-честному» с помощью последовательного применения алгоритма Евклида вычислить интересующий нас $\text{lcm}(1, 2, \dots, k)$ и взять максимальное число, не превосходящее $n - 1$, которое на него делится — это будет

$$m' = (n - 1) - ((n - 1) \bmod \text{lcm}(1, 2, \dots, k)).$$

Таким образом, решение работает в общем случае за $\mathcal{O}(k \log k)$.