

Эффективный двигатель

Автор задачи и разработчик: Мария Жогова

Докажем, что в конце будут активными только те карманные вселенные, которые являются полными квадратами. Посмотрим на произвольное число m и на его разложение на простые:

$$m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}.$$

Известно количество его натуральных делителей, оно равно в точности $(a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot \dots \cdot (a_k+1)$. Действительно, каждое простое из разложения m входит в его делитель независимо от других со степенью от 0 до соответствующего a_i включительно.

Заметим, что такое произведение нечетно тогда и только тогда, когда все a_i четны. А это равносильно тому, что \sqrt{m} — целое число, то есть m — полный квадрат. А если карманная вселенная номер m активна, это как раз и равносильно тому, что количество делителей m нечетно, ведь изначально все вселенные заморожены, а дальше меняют свое состояние перед каждым полетом, номер которого является делителем m .

Посчитать количество полных квадратов от 1 до n можно за время $\mathcal{O}(1)$, просто вычислив корень из n и округлив его вниз.