

Пропал мусор

Автор задачи и разработчик: Владимир Рябчун

Для решения этой задачи удобно рассматривать массив длины 2^k , для этого исходный массив можно дополнить до ближайшей степени двойки нулями в конце.

Ответ на запрос суммы будем выполнять так: для каждого бита нужно посчитать, в каком количестве слагаемых этот бит равен единице. Пусть таких слагаемых c_d . Тогда ответом будет $\sum_{d=0}^{15} 2^d \cdot c_d$. Опишем вычисление величин c_d .

Будем решать задачу отдельно для каждого бита. Для бита d весь массив разобьётся на отрезки длины 2^d , на которых у индексов в массиве этот бит будет постоянным (так, третий бит равен 0 для индексов с 0 по 7, равен 1 для индексов с 8 по 15, и так далее).

Заметим, что c_d состоит из количества элементов массива a_i , имеющих 1 в d -м бите, стоящих на позиции i , имеющей 0 в d -м бите, и наоборот. Если рассматривать только d -й бит, у нас имеется массив из 0 и 1, в котором некоторые элементы нужно рассматривать инвертированными (если в индексе i стоит 1 в d -м бите), а некоторые — нет (если в индексе стоит 0). Воспользуемся свойствами двоичной записи натуральных чисел, а именно:

- все такие отрезки имеют длину 2^d ;
- а благодаря тому, что $n = 2^k$, эти отрезки соответствуют внутренним вершинам обыкновенного дерева отрезков для данного массива.

Тогда построим дерево отрезков на сумму (считать будем количество единиц на отрезке), но не будем опускаться ниже d -го слоя, сделаем вершины, соответствующие отрезкам длины 2^d , листьями. А в каждом из этих листьев построим отдельное дерево отрезков, позволяющее быстро выполнять операции изменения (битовые операции для каждого конкретного бита транслируются в присвоение или инверсию).

Запросы к внешнему дереву отрезков посещают $\mathcal{O}(1)$ листьев, в каждом из которых выполнится запрос за $\mathcal{O}(\log N)$ действий, поэтому асимптотика любого запроса для фиксированного бита будет $\mathcal{O}(\log N)$.

Итоговая асимптотика будет $\mathcal{O}(\log N \cdot \log M)$, где M — максимальное значение элементов в массиве.