# Сокровищница

Требуется построить несколько вложенных друг в друга латинских квадратов с заданными размерами и совпадающими верхними-левыми углами.

Для начала, научимся определять, когда решения не существует. Докажем, что размеры вложенных друг в друга латинских квадратов должны отличаться хотя бы в 2 раза. Допустим, существуют два латинских квадрата с размерами $a \times a$ и $b \times b$, вложенные друг в друга, и при этом $a < b$ и $a \cdot 2 > b$. Тогда рассмотрим $a$ чисел, которые встречаются в меньшем квадрате. Они должны встречаться в каждой строке большого. При этом, в строках и столбцах с номерами от 1 до $a$ они уже встречаются в меньшем квадрате. Значит, в строках с номерами $a + 1 \dots b$ должно быть по $a$ таких чисел. При этом, все эти числа должны стоять в столбцах с номерами $a + 1 \dots b$. Поэтому, с одной стороны нужно поставить хотя бы $(b - a) \cdot a$ чисел, а с другой стороны у нас есть для этого только $(b - a) \cdot (b - a)$ доступных клеток. Из предположения, что $a \cdot 2 > b$ следует, что доступных клеток меньше количества чисел, которые необходимо поставить. Пришли к противоречию. Значит, размеры двух вложенных латинских квадратов должны отличаться хотя бы в 2 раза.

Оказывается, что во всех остальных случаях решение можно построить. Научимся решать задачу для двух квадратов размерами $a \times a$ и $b \times b$. Тогда мы будем уметь решать задачу для любой последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n$ просто решая задачу сначала для $a_1$ и $a_2$, потом для $a_2$ и $a_3$ и так далее. Для начала, расставим числа $1 \dots a$ на пересечении строк и столбцов с номерами $a + 1 \dots b$. Это можно сделать просто расставив 1 на главной диагонали, 2 на один правее, 3 еще на один правее и так далее (после столбца номер $b$ идет столбец номер $a + 1$). Осталось расставить числа $a+1 \dots b$. Причем, каждое число должно встречаться ровно в одной строке и ровно в одном столбце. Несложно заметить, что позиции одного числа соответствуют ребрам из полного паросочетания в двудольном графе, левой долей которого являются строки, правой долей — столбцы, а ребрами — свободные клетки. Докажем, что полное паросочетание всегда будет существовать. В общем случае, у нас есть матрица $x \times x$ и в каждом столбце и каждой строке свободны ровно $y$ клеток. Применим лемму Холла. Рассмотрим некоторое множество строк размера $k$. Из этого множества выходит ровно $k \times y$ ребер. По принципу Дирихле, ребра ведут минимум в $k$ столбцов. Значит, лемма Холла выполнена и полное паросочетание существует. Причем, оно будет существовать и после того, как мы найдем одно полное паросочетание и займем очередным числом соответствующие клетки. Для того, чтобы находить паросочетания, можно воспользоваться алгоритмом Куна или Хопкрофта-Карпа. В зависимости от выбранного алгоритма и от оптимальности кода, решение может проходить или не проходить последнюю подзадачу.