
Разбор задачи «Доставка почты»

Авторы задачи: Михаил Ютман, Николай Будин

Немного переформулируем задачу. Дано дерево, подвешенное за вершину номер 1. У каждой вершины можно выбрать произвольный порядок детей, после чего, выполняется обход дерева из вершины 1, и все вершины выписываются в порядке первого посещения. Требуется посчитать количество способов выбрать порядок детей у всех вершин, чтобы вершина a_i была выписана раньше вершины b_i для всех i .

Пусть вершина a должна быть выписана раньше, чем b . Если a является предком b , это произойдет в любом случае. Аналогично, если b является предком a , это не произойдет никогда.

Иначе, рассмотрим c — наименьшего общего предка вершин a и b — наиболее глубокую вершину, являющуюся одновременно предком и a , и b . Обозначим за a' ребёнка вершины c , который является предком вершины a , и за b' — ребёнка c , являющегося предком b . Несложно заметить, что a' и b' существуют, единственны и не равны. Тогда a будет выписано до b , если из вершины c переход в a' будет выполнен раньше, чем в b' . Поэтому, требуется посчитать количество способов упорядочить детей вершин, чтобы не нарушалось ни одно из таких условий. Так как условия между вершинами независимы, можно посчитать количество способов упорядочить детей отдельно для каждой вершины, и затем перемножить результаты. Для того, чтобы решить задачу для отдельной вершины, нужно посчитать количество топологических сортировок в ориентированном графе, вершинами которого являются дети данной вершины, а рёбрами — наложенные ограничения.

Для нахождения наименьшего общего предка двух вершин, можно использовать либо наивный алгоритм, работающий за линейное время, что соответствует подгруппам 3–5. Либо любой оптимальный алгоритм, например, отвечающий на один запрос за время $O(\log n)$, что соответствует подгруппам 6–7.

Для нахождения количества топологических сортировок графа, содержащего не более D вершин, можно либо разобрать вручную все случаи для $D = 3$, либо перебрать все перестановки вершин для $D = 7$, либо использовать метод динамического программирования по подмножествам для $D = 12$.