Починка массива

Заметим пару полезных фактов: если с помощью операций перенести k элементов в начало и m элементов в конец массива, то:

- Можно выполнять операции с такой очередностью, что перенесенные элементы будут в любом необходимом порядке, например отсортированном.
- Элементы, которые перенесены в начало являются k наименьшими числами исходного массива, а в свою очередь элементы, перенесенные в конец должны быть m наибольшими числами в массиве.

Таким образом, чтобы массив был отсортирован, все элементы, которые не переносились должны быть в отсортированном порядке относительно друг друга.

Для облегчения задачи выполним масштабирование: отсортируем первоначальные элементы в отдельном массиве, а затем уберем повторы. Затем в исходном массиве заменим элементы, на их индексы в полученном массиве. Например, если изначально массив выглядел, как $\{3, 1, 2, 3, 40, 55\}$, после масштабирования он будет выглядеть следующим образом: $\{2, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Заметим, что так как масштабирование не влияет на порядок элементов, ответ на задачу для исходного массива и нового будет идентичным. Более того, теперь в массиве все значения не превосходят его длину.

После масштабирования выполняется следующее свойство, если в массиве есть элемент x, то в нем также есть элемент $x + 1$, либо x является наибольшим элементом массива. Тогда заметим, что после удаления из массива элементов, к которым была применена операция оставшиеся элементы будут образовывать последовательность следующего вида: $\{x, x, \ldots, x, x{+}1, x{+}1 \ldots x{+}1, \ldots x{+}q\}$, то есть разобьется на отрезки из соседних чисел. Иначе массив не будет отсортирован. Тогда заметим:

- Если к хотя бы одному элементу со значением x применяется операция по переносу в начало, то нигде среди оставшихся элементов кроме как в начале не могут находится элементы с таким же значением.
- Аналогичное верно для переносов в конец.

Для начала для каждого значения массива посчитаем его первое и последнее вхождение в исходный массив, составим из них отрезок $[l_x; r_x]$. Тогда оставшиеся элементы представляются, как последовательно соединенные отрезки, а также для каждого отрезка верно:

- Все значения за которые он отвечает были переставлены, тогда отрезок не входит в оставшиеся элементы.
- Все элементы из этого отрезка остались нетронутыми, тогда он входит в оставшиеся элементы.
- Некоторые (не все) элементы со значениями, за которые отвечал отрезок, могли быть перенесены вперед и тогда отрезок $[l_x, m_x]$ будет являться началом последовательности оставшихся элементов, где m_x некоторое вхождение x.
- Аналогично для переносов в конец.

Некоторые отрезки вполне могут «не мешать друг другу», например, если рассмотреть некоторое значение x и будет верно, что $r_x < l_{x+1}$, заменим эти два отрезка на отрезок $[l_x; r_{x+1}]$. После всех возможных замен получится, что последовательность оставшихся элементов выглядит следующим образом: Либо начало отрезка и конец следующего за ним, либо три подряд отрезка, у крайних из которых взяты только части. Все нужные значения m_x необходимые для нахождения частей отрезков предлагается искать двоичным поиском.

Итоговая сложность решения $\mathrm{O}(n \log n)$.