Квадраты Фибоначчи

Оказывается, что

$$\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

Докажем это по индукции. База: $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} f_i^2 = 1 = f_0 \cdot f_1$$

Переход: знаем, что

$$\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

Прибавим к обоим частям по f_{n+1}^2

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1} \cdot f_{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i^2 = f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1})$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i^2 = f_{n+1} \cdot f_{n+2}$$

Осталось научиться вычислять n-е число Фибоначчи по модулю. Это достаточно стандартная задача на оптимизацию динамического программирования возведением матрицы в степень. Подробнее можно почитать, например, здесь: `https://e-maxx.ru/algo/fibonacci_numbers`.