

Dice Grid

Идея: Георгий Корнеев
Разработка: Нияз Нигматуллин

Для решения задачи будем пытаться двигать кубик, в котором изначально неизвестны цвета по полю, постепенно раскрашивая стороны кубика.

Так как нам надо учесть все возможные варианты путей и раскрасок, построим следующий граф. Вершинами в нём будут тройки $\langle cube, i, j \rangle$, где $cube$ — последовательность из шести цветов кубика, либо специального значения, которое обозначает, что цвет неизвестен, а (i, j) — координаты клетки, в которой мы находимся. Запретим вершины, в которых цвет нижней грани кубика неизвестен или не совпадает с цветом клетки (i, j) . Рёбра из вершины — движения вверх или влево.

Далее можно запустить обход в ширину или в глубину из финишной клетки (n, n) , чтобы движениями влево и вверх добраться до клетки $(1, 1)$.

Если с какой-то раскраской кубика мы смогли это сделать, то полученная раскраска — это ответ.

Граф явно строить не обязательно, преобразования кубика после движения влево и вверх можно вычислять во время обхода. Единственное, что нужно хранить — это посещённые вершины (например, в хеш-таблице).

Можно доказать, что число вершин в таком графе — $O(n^4)$, так как можно показать, что число различных состояний кубика — $O(n^2)$. Если рассмотреть состояния, в которых только 4 грани из 6 с известным цветом:

1. *(2 оставшиеся грани имеют общую сторону)* Используя только эти грани, можно посетить $O(1)$ клеток, вариантов для пятого цвета — $O(1)$, варианты для шестого цвета можно ограничить $O(n^2)$;
2. *(2 оставшиеся грани противоположны)* Используя эти грани, можно добраться только до клеток одной строки или столбца. Вариантов для пятого цвета — $O(n)$, вариантов для шестого цвета в дальнейшем тоже $O(n)$.