Halfway There

Идея:	Артем Васильев
Разработка:	Артем Васильев

Ключевая идея решения состоит в том, что если число x взаимно просто с n, то и $n - x$ также взаимно с n. Это можно доказать, используя стандартное рекуррентное соотношение для алгоритма Евклида: $\gcd(n, n-x) = \gcd(n, -x) = \gcd(n, x) = 1$.

Это означает, что в списке взаимнопростых с n чисел для каждого числа $x < \frac{n}{2}$ есть парное число $n - x > \frac{n}{2}$. Также, для всех чисел, кроме $n = 2$, $\frac{n}{2}$ не принадлежит списку взаимно простых чисел. Это значит, что для $n > 2$ список имеет четную длину, и содержит одинаковое количество чисел, меньших и больших $\frac{n}{2}$. Задача свелась к тому, чтобы найти взаимно простое с n число, которое ближе всего к $\frac{n}{2}$ снизу.

Найти такое число можно простым циклом: начнем с $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и будем уменьшать k, пока $\gcd(n, k) > 1$. Интуитивно кажется, что много подряд чисел, имеющих общий делитель с n, быть не может, поэтому этот цикл быстро останавливается. Оценить сверху количество итераций можно с помощью расстояния между соседними простыми числами (англ. *prime gap*) или функции Якобсталя (англ. *Jacobstahl function*), равной максимальному расстоянию между взаимно простыми с n числами.

Однако, если копнуть глубже, можно увидеть, что ответом является одно из чисел $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ или $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$. Разберем несколько случаев:

- Для нечетных чисел $n = 2k + 1$ ответ всегда равен k, поскольку $\gcd(2k + 1, k) = gcd(1, k) = 1$.
- Если $n = 4k$, то ответом будет $2k - 1 = \frac{n}{2} - 1$, потому что $\gcd(4k, 2k - 1) = \gcd(2, 2k - 1) = 1$, так как $2k - 1$ нечетно, а $2k$ четно.
- Если же n имеет остаток 2 по модулю 4, то есть, $n = 4k + 2$, то ответом будет $2k - 1$: $\gcd(4k + 2, 2k - 1) = \gcd(4, 2k - 1) = 1$, а $\frac{n}{2} = 2k + 1$ и $\frac{n}{2} - 1 = 2k$ не взаимно просты с n (кроме случая $n = 2$, который нужно рассмотреть отдельно).