Grand Center

Идея: Николай Карпов
Разработка: Павел Кунявский

Зафиксируем некоторое значение дисбаланса d. Рассмотрим некоторую точку x_0. Нужно получить условие, при котором ответ для этой точки не больше, чем d.

Переберем сторону, через которую прямая пересечет многоугольник с той стороны, где отрезок меньше, и рассмотрим некоторое направление. Опустим перпендикуляр из точки x_0, а также второй точки пересечения на сторону. Из подобия полученных треугольников следует, что чтобы дисбаланс для этого направления был не больше d, нужно, чтобы точка x_0 была не более чем в $d+1$ раз ближе к прямой, содержащей отрезок, чем вторая точка пересечения.

Заметим, что достаточно, чтобы это условие выполнялось для самой далекой от данной стороны вершины многоугольника, так как тогда оно будет выполнено и для всех остальных направлений. С другой стороны, выполнение этого условия для нее является необходимым, так как даже если прямая проходящая через нее и точку x_0 не пересекает сторону, то отрезок до второй точки пересечения будет только меньше, чем до точки пересечения с прямой содержащей сторону. Множество таких точек образует полуплоскость, паралельную стороне.

Таким образом необходимо и достаточно, чтобы точка лежала в пересчении n полуплоскостей. Для того, чтобы найти эти полуплоскости, достаточно для каждой стороны найти самую далекую от нее точку, и сдвинуть прямую, проходящую через сторону, на нужное расстояние. Это можно сделать за линейное время. Проверить непустоту пересечения полуплоскостей можно за время $O(n \log n)$ или же за линейное время рандомизированным алгоримтмом. Значение же d можно подобрать бинарным поиском. При этом сортировать полуплоскости достаточно один раз, а пересечение уже отсортированных можно находить за линейное время. В таком случае общее время решения составит $O(n \log \frac{1}{\varepsilon})$. Решение с лишним $O(\log n)$ также можно написать, чтобы оно укладывалось в ограничения.

Интересным вопросом является верхняя граница для бинарного поиска. Из решения выше можно показать, что ответ всегда не больше, чем 2. Заметим, что для треугольника ответ всегда не больше (а на самом деле равен) 2 — подходит его центр масс. Это значит, что для $d = 2$ любые три полуплоскости в решении выше пересекутся. В таком случае, по теореме Хелли, и пересечение всех их вместе непусто, т. е. существует точка, ответ для которой не больше 2.

Кроме того, из доказательства решения следует, что множество точек, для которых ответ не больше чем d, является выпуклым. А значит, многие численные методы поиска минимума этой функции (например, два вложенных тернарных поиска) корректно работают. Осталось только научится эффективно вычислять функцию в точке. Для этого необходимо заметить, что худшим направлением всегда является направление через одну из вершин. А найти сторону, через которую пройдет прямая в направлении вершины, можно методом двух указателей для всех вершин за линейное время. Однако у такого решения могут быть трудности с точностью и/или временем работы. А также с тем, что функция не определена снаружи многоугольника, что может быть неудобно для многих численных методов.