Разбор задачи «Каждой твари — по паре»

Заметим, что нас не интересуют конкретные положения тварей на плоскости, а лишь знак их координаты. Пусть есть X_+ тварей-мальчиков с положительной x-координатой и X_- тварей-мальчиков с отрицательной x-координатой. Аналогично, пусть есть Y_+ тварей-девочек с положительной y-координатой и Y_- тварей-девочек с отрицательной y-координатой. Посчитаем эти значения в начале решения.

Переберем, сколько будет пар, в которых обе твари будут иметь положительную координату. Пусть это значение будет равняться P_{++}. Зная это значение, мы можем определить количество пар, в которых мальчик будет иметь положительную координату, а девочка — отрицательную. Несложно понять, что это количество $P_{+-} = X_+ - P_{++}$ (так как $P_{++} + P_{+-} = X_+$). Аналогично можно определить количество пар, в которых мальчик будет иметь отрицательную координату, а девочка — положительную $P_{-+} = Y_+ - P_{++}$ и количество пар, в которых обе твари будут иметь отрицательную координату $P_{--} = X_- - P_{-+}$.

Зная эти значения, мы можем вычислить количество разбиений на пары при таких значениях. Легко понять, что достаточно для каждой твари определить знак координаты твари, с которой она будет в паре. Таким образом, нам нужно из X_+ тварей с положительной x-координатой выбрать какие-то P_{++}, в паре с которыми будет тварь с положительной y-координатой. Чтобы сделать это есть $C_{X_+}^{P_{++}}$ вариантов, где C_n^k — количество сочетаний из n по k. Напомним, что число сочетаний может быть вычислено по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Аналогично, нам нужно из X_- тварей с отрицательной x-координатой нужно выбрать какие-то P_{-+}, в паре с которыми будет тварь с положительной y-координатой. Для этого есть $C_{X_-}^{P_{-+}}$ вариантов. Аналогично, есть $C_{Y_+}^{P_{++}}$ и $C_{Y_-}^{P_{+-}}$ вариантов для тварей-девочек. Таким образом, чтобы получить ответ, переберем значение P_{++}, и если все значения P_{+-}, P_{-+}, P_{--} получились неотрицательными, прибавим к ответу значение $C_{X_+}^{P_{++}} \cdot C_{X_-}^{P_{-+}} \cdot C_{Y_+}^{P_{++}} \cdot C_{Y_-}^{P_{+-}}$.

Чтобы быстро вычислять значения C_n^k, посчитаем в начале программы значения $n!$ и обратные к ним значения по нужному модулю, это позволит вычислять C_n^k за время $\mathcal{O}(1)$. Для того, чтобы искать обратное по модулю число, можно использовать алгоритм быстрого возведения в степень, работающий за время $\mathcal{O}(\log M)$, где M — модуль, по кторому производятся вычисления. Таким образом, асимптотика времени работы программы составит $\mathcal{O}(n \log M)$.