Разбор задачи «Портальная пушка»

Переберем индекс i массива A, тем самым зафиксировав a_i. Для фиксированного i нам нужно посчитать $\sum_j (i-j) \cdot |a_i - b_j|$. Теперь раскроем $|a_i - b_j|$, рассмотрев два случая:

- $a_i \geqslant b_j$. Тогда $\sum_j (i-j) \cdot |a_i - b_j| = \sum_j (i \cdot a_i - i \cdot b_j - j \cdot a_i + j \cdot b_j)$;
- $a_i < b_j$. Тогда $\sum_j (i-j) \cdot |a_i - b_j| = \sum_j (i \cdot b_j - i \cdot a_i - j \cdot b_j + j \cdot a_i)$.

Выражения в обоих случаях одинаковы с точностью до знака, поэтому мы рассмотрим подсчет только первого из них. $\sum_j (i \cdot a_i - i \cdot b_j - j \cdot a_i + j \cdot b_j) = \sum_j i \cdot a_i - \sum_j i \cdot b_j - \sum_j j \cdot a_i + \sum_j j \cdot b_j$. Отсортируем массив пар (b_i, i) по возрастанию и двоичным поиском найдем минимальный индекс min_j, такой, что $a_i \geqslant b_{min_j}$.

- При фиксированном i, $i \cdot a_i$ — константа для всех j, поэтому $\sum_j i \cdot a_i = i \cdot a_i \cdot (|b| - min_j + 1)$;
- $\sum_j i \cdot b_j = i \cdot \sum_{j=min_j..|b|} b_j$;
- $\sum_j j \cdot a_i = a_i \cdot \sum_{j=min_j..|b|} b_j.index$, где $b_j.index$ — индекс b_j в начальном неотсортированном массиве (то есть второе число в паре);

Заметим, что чтобы посчитать сумму $\sum_{j=min_j..|b|} b_j$, достаточно посчитать префиксные суммы $pref_i = b_1 + b_2 + ... + b_i$ на отсортированном массиве. Чтобы посчитать суммы $\sum_{j=min_j..|b|} b_j.index$ и $\sum_{j=min_j..|b|} j \cdot b_j$, также достаточно посчитать другие префиксные суммы на отсортированном массиве. Таким образом, мы научились для фиксированного i за $O(\log |b|)$ вычислять сумму $\sum_j (i-j) \cdot |a_i - b_j|$. Суммарное время работы — $O(|a| \cdot \log(|b|))$.