Разбор задачи «Гарри и носки»

Мысленно положим левые носки в ряд так, что все носки лежат непрерывным и занумеруем их в таком порядке.

По сути мы хотим найти число таких перестановок правых носков, что ни для одной позиции цевого и правого носка не совпадают.

Пусть $A\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - множество перестановок правых носков, про которые верно, что носки с номерами $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ будут иметь пару такого же цвета.

В таком случае ответом на задачу является $|A\{\emptyset\}/\bigcup(A\{x_1\}, A\{x_2\}, \ldots, A\{x_n\})|$. Научимся считать $|A\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}|$. Пусть в множестве x_i p_1 носков цвета 1, p_2 носков цвета $2, \ldots, p_m$ носков цвета m. Тогда мы выберем, какая будет пара для этих носков, а у остальных может быть любая пара. Способов так сделать: $\binom{c_1}{p_1} \cdot \binom{c_2}{p_2} \cdot \ldots \cdot \binom{c_m}{p_m} \cdot \binom{n-k}{c_1-p_1} \cdot \binom{n-k-(c_1-p_1)}{c_2-p_2} \ldots$.

По формуле включений-исключений $\bigcup(A\{x_1\}, A\{x_2\}, \ldots, A\{x_n\}) = \sum(-1)^k \cdot |A\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}|$. Давайте для каждого k от 0 до n посчитаем сумму размеров множеств A с таким k. Для этого посчитаем $dp_{color,used}$ - число способов найти пару носкам первых $color$ цветов так, чтобы $used$ носков имели пару свокго цвета. Переход — это перебор числа носков, среди носков данного цвета, которые будут иметь пару своего цвета.

Более формально: $dp_{i,j} = \sum_{k=0}^{\min(j,cnt_i)} dp_{i-1,j-k} \cdot \binom{cnt_i}{k}^2 \cdot k!$, а ответ равен $\sum_{i=0}^{n} dp_{n,i} \cdot (n-i)! \cdot (-1)^i$.

Суммарное время на подсчёт $dp_{i,j}$ — $O(n^2)$.