Разбор задачи «Тюрьма для Зедда»

Заметим, что противоположные грани параллелепипеда должны быть равны, поэтому можно поворотом перевести каждый прямоугольник к виду $a_i \leqslant b_i$, и искать уже три прямоугольника. Далее следует понять, что если длины сторон, исходящих из одной вершины, равны A, B и C, то параллелепипед должен быть составлен из трех прямоугольников со сторонами $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$, не забыв, учесть два аспекта: для каждой грани должно быть хотя бы по два соответствующих прямоугольника, кроме того, если два или три размера равны друг другу, некоторые грани совпадают и количество необходимых прямоугнольников возрастает до 4 и 6, соответственно.

Решение первой подзадачи (27 баллов): можно перебрать три прямоугольника, которые войдут в ответ, и явно проверить условие, описанное ранее. Данное решение работает за $O(n^3)$.

Решение второй подзадачи (63 балла): можно перебрать один прямоугольник. Пусть он имеет размер $A \times B$ — у нас уже известно две размерности параллелепипеда, осталось лишь перебрать третью размерность параллелепипеда C и проверить, есть ли прямоугольники размера $A \times C$ и $B \times C$. На этом моменте можно допустить ошибку, когда $A = B$, $A = C$ или $B = C$, попытавшись использовать один прямоугольник дважды, хотя его можно взять не больше одного раза. Для простоты можно считать что A, B и C различны, а случаи, когда какая-то пара совпадает, разобрать отдельно, это несложно сделать за $O(n)$. Данное решение работает за $O(n^2)$.

Полное решение (100 баллов): будет удобно перейти к графовой интерпретации задачи. Наличие прямоугольников со сторонами $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$ эквивалентно нахождению цикла длины 3 в графе, построенном на числах, отвечающих за размерности параллелепипеда — прямоугольник $A \times B$ отвечает в таком графе за ребро AB.

Решение за $O(n^2/64)$: перебираем одно из ребер uv треугольника, и смотрим на пересечение множества соседей вершин u и v. Это можно сделать пересечением bitset-ов за $n^2/64$, и перебрать третью вершину треугольника как все единички в пересечении bitset-ов.

Решение за $O(n\sqrt{n})$: можно упорядочить все вершины по возрастанию их степени, количества смежных ребер. Переберем вершину с минимальной степенью, входящую в треугольник. После этого можно перебрать ее соседа — вершину, которая будет второй по степени среди вершин нашего цикла. После этого переберем третью вершину, как соседа второй, и проверим, есть ли ребро между первой и третьей вершиной.

Можно показать, что если перебирать вершины именно в таком порядке увеличения степени на графе с m ребрами, будет рассмотрено не более $m\sqrt{m}$ троек чисел. Для этого можно разбить отсортированный массив степеней deg на две части: префикс, в котором сумма не больше $\sqrt{n}$, и суффикс. Когда первая вершина из первой части массива, мы переберем $\sqrt{n}$ кандидатов на вторую вершину и n кандидатов на третью, что дает $n\sqrt{n}$. Во второй же части не больше $\sqrt{n}$ вершин, поэтому кандидатов на третью вершину для них будет не больше $\sqrt{n}$, что снова приводит нас к тому, что треугольников в графе не больше $O(n\sqrt{n})$.