Разбор задачи «Расписание»

Рассмотрим для начала левый нижний квадрат 4×4 (с углами в $(0, 0)$ и $(3, 3)$). Его заполнение, начиная с нулевой строчки, будет такое:

3	2	1	0
2	3	0	1
1	0	3	2
0	1	2	3

Назовем данную матрицу S.

Тут уже можно выделить некую закономерность — заполнение двух диагоналей и расположение чисел 1 и 2. Далее можно заметить, что если рассматривать левый угловой квадрат 16×16 (с углами в $(0, 0)$ и $(15, 15)$) и в качестве клетки выделять квадрат 4×4, то взаимное расположение таких клеток-квадратов будет точно таким же, как и в S. Такую закономерность можно наблюдать и при рассмотрении квадрата 64×64 с клетками-квадратами 16×16 и так далее.

Рассмотрим также все квадраты 4×4, у которых индекс левой нижней клетки кратен 4 (то есть $(0, 0)$ - $(3, 3)$, $(4, 0)$ - $(7, 3)$, $(0, 4)$ - $(3, 7)$ и так далее). Если взять в них числа по модулю 4, то они будут идти в той же расстановке, что и в S.

Тогда ответ в клетке (i, j) можно посчитать, просто переходя от больших квадратов, у которых длина стороны — степень 4, к меньшим — , суммируя степени 4-ки.

$\sum\limits_{p} S[i/4^p \bmod 4^p][j/4^p \bmod 4^p] * 4^p$, где p — степень.

Это решение работает за O(log(max(i, j)), но его можно ускорить.

Заметим, что числа в S удовлетворяют условию $i \operatorname{xor} j$. Деление индексов i и j на степень 4^p лишь означает, что мы рассматриваем (xor-им) какую-то пару соседних разрядов в двоичном представлении i и j. При увеличении степени p, мы просто сдвигаем пару соседних разрядов влево и xor-им уже их и так далее. Таким образом, мы просто делаем $i \operatorname{xor} j$.