Разбор задачи «Киноманы»

В этой задаче нужно сделать именно то, что требуется в условии: посчитать, сколько суммарно времени провели за просмотром видео Макс и Мел, и сравнить эти два числа.

Разбор задачи «Макс и расстояния»

Заметим, что если мы сдвинем все точки на какое-то расстояние — то матрица не изменитя. Тогда будем считать, что $x_1 = 0$.

Найдем в матрице максимальное число — это расстояние между минимальной и максимальной точкой, пусть оно стоит в ячейке (i, j). Тогда мы можем взять любую из точек i, j как минимальную точку, вторая будет максимальной. От того, какая из точек будет минимальная существование ответа не зависит, а зависят лишь перестановки a и b.

Теперь найдем в i строке ноль — это будет расстояние между i-й точкой и точкой с таким же значением x_i. Пусть этот ноль стоит в столбце k.

Теперь нужно найти перестановки a и b. Отсортируем i строку и по расстояниям. А также k столбец. Порядок точек в i строке даст перестановку b, а в j столбце — a. Одновременно с нахождением перестановок мы можем восстановить значения координат точек на прямой просто как расстояние от точки i, так как мы условились, что она находится в нуле.

Теперь остается не забыть проверить, что эти перестановки и координаты точек удовлетворяют данной матрице.

Разбор задачи «Многочлены»

В этой задаче нужно аккуратно реализовать разбор многочлена. Для каждого слагаемого вычислить коэффициент, степень n и степень m. Потом для каждой пары степеней n и m нужно вычислить сумму коэффициентов по всем слагаемым. После этого осталось лишь вывести многочлен в требуемом формате.

Разбор задачи «Макс и Дюк»

Для каждой позиции найдем максимальный палиндром из нее. Для этого переберем позицию и сделаем бинарный поиск по длине палиндрома, проверим равенство подстрок хешами. Пусть $S[i]$ — максимальный палиндром с центром i

Решим задачу отдельно для $[l, \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor]$ и $[\lceil \frac{l+r}{2} \rceil, r]$. На таких отрезках однозначно задается граница, которая мешает расширяться палиндромам. Теперь решаем оффлайн сканлайн + ДО для ответа на запрос.

Для отрезков $[l, \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor]$ нужно узнать сколько чисел от меньше чем l. Так же сумму всех чисел, которые больше, либо равны l.

Нам нужно посчитать сумму $i - max(S[i], l)$ по всем i в отрезке $[l, \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor]$. Раскроем $max(S[i], l)$ и представим его, как сумму чисел, которые меньше l прибавить количество чисел, которые больше либо равны l умноженных на l

Развернем строк и аналогично решаем для $[\lceil \frac{l+r}{2} \rceil, r]$.

Разбор задачи «Степенная башня Макса»

Если остаток a_1 по модулю 3 равен нулю или единице — то ответ 0 или 1 соответственно, вне зависимости от остальных чисел.

Если остаток a_1 по модулю 3 равен 2 — то посмотри на четность a_2: если a_2 четно — вне зависимости от остальных чисел, степень, в которую нужно возвести a_1 будет четная, значит ответ 1, если же a_2 нечетно, то результат также не зависит от остальных чисел, и ответ 2.

Разбор задачи «Префиксы-суффиксы»

У данной задачи существует множество решений. Например, можно было перебрать все пары чисел и посмотреть выполняется ли условие задачи.

Однако можно действовать хитрее и просто выводить «1 1». Почему это верно? Потому что любое число является своим префиксом и своим суффиксом.

Разбор задачи «Восстановление массива»

Будем идти по массиву с конца. Понятно, что раз мы хотим сделать последовательность неубывающей, последнее число менять не стоит. Из предпоследнего числа хочется удалить несколько цифр так, чтобы оно стало максимально возможным, но не большим последнего. И так далее.

Как по данным числам a, b удалить несколько цифр из числа a, чтобы оно стало максимально возможным, не большим b?

- Если длина a меньше длины b, ничего делать не надо;
- Если нет, то заметим факт: чем больше общий префикс a, b после удаления цифр, тем число a больше;
- Переберем длину этого общего префикса $prefix$ от 0 до $|b|$, пройдем по числу a, удаляя цифры, не относящиеся к общему префиксу. Пусть индекс последней цифры общего префикса в числе a — $index$;
- После этого нужно сделать две вещи:
  - проверить, что минимальное число, которое можно получить из a с таким префиксом, не больше b;
  - построить, собственно, максимальное число, не большее b.
- Для проверки этих двух пунктов предподсчитаем массив $next[i][d] = \min j > i|a[j] = d$
- Теперь, чтобы проверить, что минимальное число, которое можно получить из a с перебранным префиксом, будет не больше b, переберем следующую его цифру $digit$ после общего префикса (от 1 до $b[prefix] - 1$) и проверим, что $|a| - next[index][digit] >= |b| - prefix$ (i — индекс в числе a,) — то есть что взяв эту цифру мы сможем набрать цифр для получения числа такой же длины, что и b (число будет заведомо меньше по построению);
- Чтобы построить максимальное число с зафиксированным общим префиксом и не больше b, действуем так же — перебираем первую цифру после общего префикса от $b[prefix] - 1$ до 1, а все остальные от 9 до 1, а потом проверяем то же условие — то есть строим наше число жадно;
- Также стоит не забыть про случай, когда ни один из префиксов не подошел — тогда надо сделать число a максимальным длиной на один меньше, чем b — это делается таким же алгоритмом, как и предыдущие два пункта.

В итоге, наш алгоритм выглядит следующим образом:

- Перебрать числа массива в обратном порядке;
- Рассматривая два соседних числа массива a, b, предподсчитать массив $next[i][d]$;
- Перебрать длину общего префикса $prefix$ от 0 до $|b|$;
- Проверить одно условие существования ответа, а после построить ответ
- Заменить a в массива на только что полученное число и продолжить алгоритм

Итоговая асимптотика нашего алгоритма — $\mathrm{O}(\sum |a_i| * 10)$, что вполне укладывается в лимит по времени.

Разбор задачи «Расписание»

Рассмотрим для начала левый нижний квадрат 4×4 (с углами в $(0, 0)$ и $(3, 3)$). Его заполнение, начиная с нулевой строчки, будет такое:

3	2	1	0
2	3	0	1
1	0	3	2
0	1	2	3

Назовем данную матрицу S.

Тут уже можно выделить некую закономерность — заполнение двух диагоналей и расположение чисел 1 и 2. Далее можно заметить, что если рассматривать левый угловой квадрат 16×16 (с углами в $(0, 0)$ и $(15, 15)$) и в качестве клетки выделять квадрат 4×4, то взаимное расположение таких клеток-квадратов будет точно таким же, как и в S. Такую закономерность можно наблюдать и при рассмотрении квадрата 64×64 с клетками-квадратами 16×16 и так далее.

Рассмотрим также все квадраты 4×4, у которых индекс левой нижней клетки кратен 4 (то есть $(0, 0)$ - $(3, 3)$, $(4, 0)$ - $(7, 3)$, $(0, 4)$ - $(3, 7)$ и так далее). Если взять в них числа по модулю 4, то они будут идти в той же расстановке, что и в S.

Тогда ответ в клетке (i, j) можно посчитать, просто переходя от больших квадратов, у которых длина стороны — степень 4, к меньшим — , суммируя степени 4-ки.

$\sum\limits_p S[i/4^p \bmod 4^p][j/4^p \bmod 4^p] * 4^p$, где p — степень.

Это решение работает за O(log(max(i, j)), но его можно ускорить.

Заметим, что числа в S удовлетворяют условию i xor j. Деление индексов i и j на степень 4^p лишь означает, что мы рассматриваем (xor-им) какую-то пару соседних разрядов в двоичном представлении i и j. При увеличении степени p, мы просто сдвигаем пару соседних разрядов влево и xor-им уже их и так далее. Таким образом, мы просто делаем i xor j.

Разбор задачи «Вентиляция»

Подвесим дерево за одну вершину, запустим поиск в глубину. Для каждой вершины сохраним родителя p_v, время входа tin_v и время выхода $tout_v$.

Заметим, что если вершина x является предком вершины y, то $tin_x \leqslant tin_y \leqslant tout_y \leqslant tout_x$.

Нужно ответить на запрос a, b. Если a не является предком b, то ответ — это p_a, так как вершины b нет в поддереве вершины a, следовательно, туда спускаться не надо.

Если a является предком b, то ответ - это один из детей вершины a, а именно тот, в чьём поддереве находится b (то есть, $tin_{ans} \leqslant tin_b \leqslant tout_b \leqslant tout_{ans}$). Заметим, что дети упорядочены по возрастанию tin и $tout$, значит, можно найти нужную вершину бинарным поиском.

Разбор задачи «Треугольники»

Очевидно, что Максу всегда удастся собрать куб из частей треугольника, и длина его ребра будет равняться $\sqrt{\frac{S}{6}}$, где S — сумма площадей треугольников.