Lucky Number Theory

Идея: Артем Васильев
Разработка: Артем Васильев

Начнем решать задачу со случая $d = 1$. Заметим, что стратегия зависит только от дробной части S (обозначается $\{S\}$): все действия для S и $S + 1$ можно делать одинаково, и результат всегда будет отличаться на единицу.

Важное наблюдение: вне зависимости от текущего распределения S, после броска, новое значение $\{S'\}$ будет иметь равномерное распределение от 0 до 1.

Благодаря этому наблюдению, мы можем предполагать, что на каждом шаге значение $\{S\}$ равномерно распределено от 0 до 1, что позволяет использовать динамическое программирование. Обозначим за $f_{n,k}$ матожидание оптимальной стратегии, если осталось n бросков, k возможностей вывести, в предположении, что в начале $\{S\}$ распределено равномерно от 0 до 1.

Обозначим $\{S\} = x$. В зависимости от x, есть два случая: бросить еще раз, либо вывести билеты и бросить еще раз. В первом случае матожидание числа билетов равно $x + f_{n-1,k}$: вероятность того, что после броска целая часть S увеличится, равна S, и мы переходим в состояние с $n - 1$ броском. Во втором случае матожидание равно $1 + f_{n-1,k-1}$: мы гарантированно получаем один билет сейчас, и переходим в состояние $(n - 1, k - 1)$. Все переходы корректны из-за наблюдения выше: несмотря на то, что мы используем x для принятия решения, после броска, $\{S\}$ все еще будет распределено равномерно от 0 до 1.

Так как x распределено равномерно от 0 до 1, нужно взять максимум из двух случаев, и проинтегрировать по x от 0 до 1: $f_{n,k} = \int\limits_0^1 \max(x + f_{n-1,k}, 1 + f_{n-1,k-1})dx$. Если обозначить $A = f_{n-1,k}$, $B = 1 + f_{n-1,k-1}$, то для $x \geq B - A$ максимум достигается в первом случае, а для $x < B - A$ — во втором. Опустив промежуточные вычисления, получаем формулу для ДП: $f_{n,k} = A + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(B - A)^2$, которую можно вычислить за $O(n^2)$ сразу для всех возможных пар (n, k). Итоговый ответ на задачу равен $f_{n-1,k-1} + 1$, учитывая первый бросок и последний вывод, который дает $+1$ к ответу.

Наконец, случай $d > 1$. Заметим, что сгенерировать случайное вещественное число в интервале $(0, d)$ это то же самое, что сгенерировать случайное вещественное число от 0 до 1, а заметим прибавить случайное *целое* число от 0 до $d-1$ включительно. Добавление случайного целого числа никак не влияет на стратегию, только на ответ: на каждый бросок в среднем прибавится $\frac{1}{d}(0 + 1 + \ldots + d - 1) = \frac{d-1}{2}$ билетов. Ответ на задачу равен решению для $d = 1$ плюс $\frac{d-1}{2}n$.