

Games of Chess

Идея: Фёдор Ушаков

Разработка: Фёдор Ушаков

Рассмотрим задачу в терминах теории графов. Нам дан неориентированный связный граф, и нужно раскрасить его вершины в некоторое число цветов так, чтобы для каждой вершины u число вершин v того же цвета, соединённых с u ребром, было нечётным.

При нечётном n ответа не существует. Действительно, предположим обратное: пусть существует какая-то допустимая раскраска. Оставим в графе только те рёбра, концы которых имеют одинаковый цвет. После этой операции у каждой вершины степень нечётна, и так как вершин нечётное число, сумма степеней всех вершин нечётна. А в неориентированном графе сумма степеней всех вершин должна быть чётной, так как каждое ребро прибавляет к этой сумме 2. Противоречие.

Для чётного n ответ всегда существует, и его можно найти с помощью следующего алгоритма:

1. Построим дерево обхода в глубину (DFS).
2. Повторяем, пока есть вершины:
 - Возьмём самый глубокий лист v . Посмотрим на его родителя u . У u есть k детей, все они — листья.
 - Если k нечётно, то покрасим поддерево u в один цвет иотрежем от остального дерева.
 - Если k чётно, но есть хотя бы один лист, из которого есть хотя бы одно обратное ребро, ведущее вверх в некоторого предка вершины u , то этот лист переподвесим к ближайшей вершине, в которую из него есть ребро, а остальную часть поддерева отрежем так же, как в предыдущем пункте.
 - Если k чётно, но рёбер вверх из листьев нет, то отрежем все эти листья и пометим, что их в конце надо будет покрасить так же, как вершину u , а саму вершину u оставим в дереве.

Можно показать, что раскраска графа по данному алгоритму является корректной. При аккуратной реализации сложность этого решения составит $O(n + m)$.