Faulty Fraction

Идея: Николай Дубчук
Разработка: Николай Будин

Вам дана строка из цифр s и целое число c. Известно, что существуют два целых положительных числа a и b, такие что $a \div b = c$ и $concat(a, b) = s$. Требуется найти любые подходящие a и b.

Обозначим за $l(x)$ длину числа x. Тогда $10^{l(x)-1} \leq x < 10^{l(x)}$.

$$\begin{cases} 10^{l(b)-1} \leq b < 10^{l(b)} \\ 10^{l(c)-1} \leq c < 10^{l(c)} \end{cases} \implies$$

$$\implies 10^{l(b)+l(c)-2} \leq b \cdot c < 10^{l(b)+l(c)} \implies$$

$$\implies l(b) + l(c) - 1 \leq l(b \cdot c) \leq l(b) + l(c);$$

$$a \div b = c \implies a = b \cdot c \implies l(a) = l(b \cdot c) \implies$$

$$\implies l(b) + l(c) - 1 \leq l(a) \leq l(b) + l(c) \implies$$

$$\implies (l(s) - l(a)) + l(c) - 1 \leq l(a) \leq (l(s) - l(a)) + l(c) \implies$$

$$\implies l(s) + l(c) - 1 \leq 2 \cdot l(a) \leq l(s) + l(c)$$

Заметим, что $2 \cdot l(a)$ — четное, поэтому оно может быть равно только одному из двух последовательных значений $l(s) + l(c) - 1$ и $l(s) + l(c)$. Таким образом, $l(a) = \lfloor \frac{l(s)+l(c)}{2} \rfloor$. Решение единственно. А раз нам гарантируется, что такие a и b должны существовать, это именно они.