Defense Distance

Идея: Артем Васильев
Разработка: Михаил Первеев

Для начала заметим, что расстояние Левенштейна является метрикой, а значит для него выполняется неравенство треугольника. Поэтому, если $a > b + c$ или $b > a + c$ или $c > a + b$, построить требуемые строки невозможно.

Во всех остальных случаях, когда неравенство треугольника выполняется, построить требуемые строки возможно. Рассмотрим один из способов, как это можно сделать.

Для удобства будем строить строки s, t и u одинаковой длины. Разобьем каждую из трех строк на блоки длины x, y и z. Для удобства пронумеруем эти блоки слева-направо числами от 1 до 3. Таким образом, строки можно представить как конкатенации блоков: $s = s_1 + s_2 + s_3$, $t = t_1 + t_2 + t_3$, $u = u_1 + u_2 + u_3$, где $|s_1| = |t_1| = |u_1| = x$, $|s_2| = |t_2| = |u_2| = y$ и $|s_3| = |t_3| = |u_3| = z$.

Теперь построим строки по следующим правилам:

- Строки s и t будут различаться в каждом символе блоков 1 и 2, но совпадать в каждом символе блока 3;
- Строки s и u будут различаться в каждом символе блоков 1 и 3, но совпадать в каждом символе блока 2;
- Строки t и u будут различаться в каждом символе блоков 2 и 3, но совпадать в каждом символе блока 1.

Нетрудно заметить, что в таком случае $\operatorname{dist}(s, t) = x + y$, $\operatorname{dist}(s, u) = x + z$ и $\operatorname{dist}(t, u) = y + z$, где dist — расстояние Левенштейна.

Таким образом, осталось выбрать числа x, y и z таким образом, чтобы получились требуемые расстояния между строками. Для этого нужно решить систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases} \tag{1}$$

Решение системы выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a + b - c}{2} \\ y = \dfrac{a + c - b}{2} \\ z = \dfrac{b + c - a}{2} \end{cases} \tag{2}$$

Если сумма $a + b + c$ четна, то x, y и z получатся целыми. В этом случае можно построить строки следующим образом: $s = a^x b^y b^z$, $t = b^x a^y b^z$, $u = b^x b^y a^z$, где a и b — произвольные различные символы, а запись c^p означает строку, равную символу c, повторенному p раз.

Теперь рассмотрим случай, когда сумма $a+b+c$ нечетна. В этом случае построим аналогичную конструкцию, округлив x, y и z вниз. Заметим, что теперь каждое из трех расстояний Левенштейна на 1 меньше, чем требуемое. Исправим это, дописав в конец каждой строки произвольный уникальный символ.

Также нужно не забыть о том, что строки должны быть непустыми, а x, y и z могут получиться равными нулю при $a = b = c = 0$. В этом случае достаточно вывести произвольные три непустые равные строки.