Asynchronous Processor

Идея: Виталий Аксёнов
Разработка: Максим Туревский

Давайте для удобства добавим в начало операцию $A := 0$ (sync). Посмотрим, как в итоге меняется величина A: она как-то меняется, потом происходит последняя операция присвоения, а потом к ней что-то добавляется. Эта последняя операция присвоения — это либо последняя синхронная операция присвоения, либо любая из асинхронных операций присвоения.

Давайте найдём все значения, которые в конце может принимать A, а в конце просто выведем их количество.

Если мы переберём позицию p среди изначальных операций, на которую мы в итоге поставим последнюю применяемую к A операцию присвоения, то мы знаем множество значений, которые мы могли в этой операции присвоить. Теперь все операции прибавления после позиции p обязательно должны примениться к A, а среди операций прибавления до позиции p — синхронные не применяются, а для каждой асинхронной мы можем выбрать, применять её или нет. С помощью динамического программирования мы можем для фиксированной позиции p найти, какие суммы достижимы в таком случае. Сложность решения тогда составит $O(n^3 v)$. Используя битовое сжатие (bitset), можно получить решение за $O(\frac{n^3 v}{64})$, но это всё ещё недостаточно эффективно.

Чтобы ускорить это решение, заметим следующее. Пусть последняя применяемая к A операция присвоения — асинхронная. Будем рассматривать её возможные позиции p в порядке возрастания. При увеличении этой позиции одна из операций прибавления переходит из состояния «после позиции p» в состояние «до позиции p». Посмотрим на эту операцию и на то, как меняется множество возможных итоговых значений A:

1. Если это операция “`+` v `sync`”, то это значит, что раньше это прибавление входило во все суммы, а теперь не входит ни в какие. Соответственно, все возможные суммы уменьшатся на v.
2. Если это операция “`+` v `async`”, то раньше v входило во все суммы, а теперь у нас есть выбор как применять эту операцию, так и не применять. Соответственно, для каждой возможной суммы x, сумма $x - v$ также становится возможной.

Случай, когда последняя применяемая к A операция присвоения — синхронная, обработаем отдельно.

Если поддерживать все допустимые значения с использованием битового множества (bitset), то это множество имеет размер $O(nv)$, и нужно совершить $O(n)$ действий с ним. Все множества, полученные в процессе выше, нужно объединить, чтобы получить итоговое множество. В итоге получим решение за $O(\frac{n^2 v}{64})$.